Задаци - прва недеља

задаци са * су посебно важни

1. * Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$. Израчунати извод функције x^α.
2. Испитати диференцијабилност функције

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

3. * Испитати диференцијабилност функције

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

4. Нека је дат скуп $S = \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ и низ природних бројева $c_n = n + [\sqrt{n} - 1]$.

   а) Доказати да за $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ број $k^2 + k - 2$ не припада низу c_n.

   б) Означимо са m_n низ природних бројева, поређаних у строго растућем поретку, који не припадају низу c_n. Доказати да $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$.

   в) Дефинишимо функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \notin S \cup \mathbb{N} \\ \frac{1}{c_n}, & x = \frac{1}{n} \in S \\ \frac{1}{m_k}, & x = 2k, k \in \mathbb{N} \\ k + 1, & x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Доказати да је f бијекција и да важи $f'(0) = 0$, док f^{-1} није непрекидна у 0.

5. * Нека су дате диференцијабилне функције f_k, g_k, h_k ($k \in \{1, 2, 3\}$).

   а) Доказати да се детерминанта

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(x) & g_2(x) & h_2(x) \\ f_3(x) & g_3(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$$

   диференцира по правилу

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & g_1'(x) & h_1'(x) \\ f_2(x) & g_2(x) & h_2(x) \\ f_3(x) & g_3(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2'(x) & g_2'(x) & h_2'(x) \\ f_3(x) & g_3(x) & h_3(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(x) & g_2(x) & h_2(x) \\ f_3'(x) & g_3'(x) & h_3'(x) \end{vmatrix}.$$

   б) Нека су функције $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидне на $[a, b]$, диференцијабилне на (a, b) и нека је

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}.$$

   Доказати да Δ испуњава услове Ролове теореме. Њеном применом на $h \equiv 1$ доказати Кошијеву теорему, а применом на $h \equiv 1$ и $g(x) = x$ Лагранжеву теорему.